Ананьевский С. М.[1], Невзоров В. Б.[2]

Схемы Бернулли в теории вероятностей

Классическая схема независимых испытаний Бернулли уже более трех столетий, начиная с работ Якова Бернулли, представляет одну из самых популярных тем в теории вероятностей. Она идеально подходит для постановки и решения различных практических задач. Получено множество результатов, связанных с модификациями этой схемы, но появляются новые ситуации, новые проблемы, которые требуют дальнейших продвижений в изучении разных случайных величин, связанных в той или иной степени с независимыми бернуллиевскими испытаниями. Здесь представлены решения некоторых таких задач.

Речь идет о последовательностях независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значение 1 с некоторой вероятностью $p, 0 < p < 1$, и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Обычно событие $\{X_n = 1\}$ трактуется как “успех в n-ом испытании”, а его дополнение — событие $\{X_n = 0\}$ — как “неудача в этом испытании”.

С этой схемой тесно связаны, например, геометрическое распределение числа испытаний (числа неудач) до первого успеха и биномиальные распределения числа неудач или числа успехов, появляющихся в результате проведения фиксированного числа n независимых испытаний.

Несмотря на множество работ, в которых решаются различные проблемы для схем Бернулли и для некоторых обобщений этих схем, появляются все новые и новые задачи в этой области, представляющие несомненный интерес с теоретической и практической точек зрения.

Речь пойдет о взаимоотношениях между сериями успехов и сериями неудач в последовательностях бернуллиевских величин.

С сериями успехов конкретной длины k, $k = 1,2, \ldots$, связаны события вида

$$X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0$$

и

$$X_r = 0, X_{r+1} = 1, \ldots, X_{r+k} = 1, X_{r+k+1} = 0, r = 1,2, \ldots$$

[1] Ананьевский Сергей Михайлович, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет

[2] Невзоров Валерий Борисович, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет

Будем проводить независимые испытания до момента образования первой серии успехов, длина которой не меньше k.

В [1] был получен вид производящей функции $V(k,r,s)$ для числа $V(k,r)$ серий, состоящих ровно из r, $r = 1,2,\dots,k-1$, успехов, появляющихся до момента образования первой серии, насчитывающей не менее k успехов. Показано, что

$$V(k,r,s) = p^{k-r}/(p^{k-r} + q - sq).$$

Здесь можно выделить частный случай $(r = 1)$ для числа серий, состоящих ровно из одного успеха:

$$V(k,1,s) = p^{k-1}/(p^{k-1} + q - sq).$$

В этой ситуации

$$P\{V(k,1) = n\} = q^n\, p^{k-1}/(q + p^{k-1})^{n+1}, n = 0,1,2,\dots$$

Далее рассмотрим некоторое обобщение схемы Бернулли. Рассмотрим следующую последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$, принимающих значения $-1, 0, 1$ с вероятностями $P\{X_n = -1\} = p_1$, $P\{X_n = 0\} = p_2$, $P\{X_n = 1\} = p_3$, где $0 < p_1 < 1$, $0 < p_2 < 1$, $0 < p_3 < 1$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
Можно, например, трактовать события $A_n = \{X_n = -1\}$, $B_n = \{X_n = 0\}$, $C_n = \{X_n = 1\}$, $n = 1,2,\dots$, как проигрыш, ничья или выигрыш футбольной команды в своем n-ом матче. Эти события могут описывать и случайное блуждание по целочисленной решетке на прямой, когда A_n соответствует сдвигу на единицу влево в момент времени n, C_n обозначает шаг вправо, а B_n означает, что сохраняется положение в достигнутой к этому моменту точке. В схеме с тремя возможными вариантами значений случайных величин появляется и ряд новых, по сравнению с бернуллиевской схемой, задач. Рассмотрим некоторые из них, ограничившись ситуациями, связанными с появлениями в данной схеме нулевых значений случайных величин. Аналогичные результаты для значений -1 или $+1$ получатся просто заменой в получаемых формулах вероятности p_2 на p_1 или p_3.
(а) Будем рассматривать ситуацию, когда подсчет нулевых значений заканчивается в момент появления в последовательности X-ов n-го по счету значения -1. Пусть $E_1(n)$ обозначает соответствующее среднее

значение появляющихся в этой ситуации нулевых значений. Тогда

$$E_1(n) = np_2/p_1\,, n = 1,2, \dots \qquad (1)$$

(b) Для нахождения величины $E_2(n)$ — математического ожидания числа появлений нулей к моменту получения n единичных значений в последовательности X-ов достаточно в (1) заменить вероятность p_1 на p_3 и получить, что

$$E_2(n) = np_2/p_3\,, n = 1,2, \dots$$

(c) Пусть $E_7(k,l)$ обозначает математическое ожидание числа нулей, насчитываемых в момент, когда происходит первое из следующих двух событий: {появление k-го по счету значения -1} или {появление l-го по счету значения $+1$}. Тогда производящая функция $\Pi(s,t)$ для последовательности $E_7(k,l)$ имеет вид:

$$\Pi(s,t) = p_{2st}/(1-s)\,(1-t)(p_1(1-s) + p_3(1-t)t).$$

Список литературы

[1] Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). № 2. С. 201–208.

[2] Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10. № 1. С. 14–20.

[3] Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. Об одном обобщении схемы Бернулли // Записки научных семинаров ПОМИ. 2024. (принята к печати).